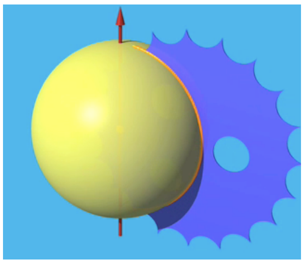
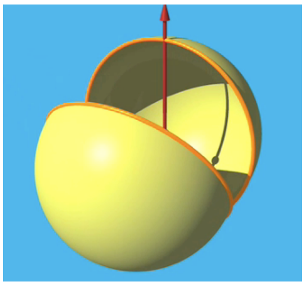
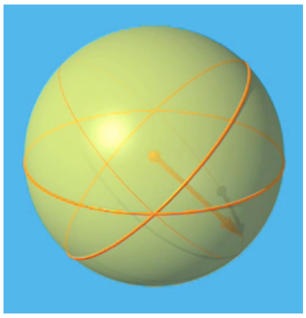
La géométrie qu'on connaît, qu'on nous apprend, est la géométrie euclidienne. C'est celle du théorème de Pythagore, de Thalès. Par exemple, par un point donné il ne passe qu'une seule droite qui parallèle à une droite donnée. Cette dernière assertion, c'est ce qu'on appelle le cinquième postulat d'Euclide. Il est équivalent à une autre affirmation : la somme des angles d'un triangle vaut 180^0. C'est la géométrie de la feuille de papier, mais, nous vivons sur une planète (plus ou moins) sphérique). Qu'est-ce alors qu'une droite sur une sphére ? un triangle ? et qu'en est-il du postulat d'Euclide ?

La pluspart des images ci-dessous sont extraites du film *Dimensions* d'Etienne Ghys, Jos Leys et Aurélien Alvarez. Ce film est librement téléchargeable sur internet à l'adresse :

http ://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

1. Sur une sphére, tracer le plus court chemin entre deux points.

   On peut commencer par regarder ce qui se passe quand on "tranche" la sphére selon un plan : l'intersection entre les deux est un cercle. Les plus grands cercles qu'on puisse obtenir sont ceux tels que le plan passe par le centre de la sphére.

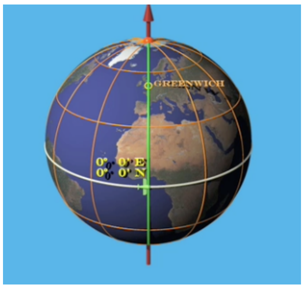
   On prend le grand cercle qui passe par les deux points. C'est en le suivant qu'on va réaliser le trajet minimal.
   Un chemin qui minimise la distance entre deux points sera appelé *géodésique*. Quand on travaille dans le plan, le chemin le plus court entre deux points, c'est la droite. L'équivalent d'une droite sur une sphére est une géodésique.

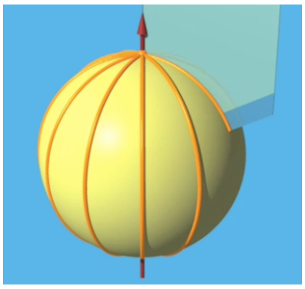
2. Si je continue tout droit sur ce chemin, que finira-t-il par se passer ?

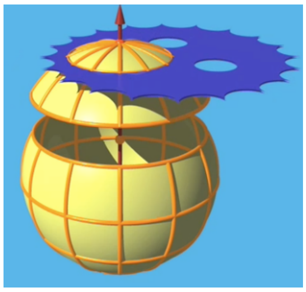
   Si je continue sur ce chemin, je reste à la fois sur la sphére et sur le plan. Je fais donc tout le tour de la sphére, pour revenir à mon point de départ.

3. A et B sont deux points sur un même parallèle. Si je suis ce parallèle pour aller de A à B, est-ce que je prends le chemin le plus court ? Et pour C et D qui sont sur un même méridien, dois-je suivre le méridien ?

   Pour se localiser sur la Terre, on a besoin de deux paramètres. Ainsi la donnée du méridien et du parallèle passant par ma position suffisent à me situer. Ce sont des lignes imaginaires. Les méridiens sont bien des géodésiques : en se déplaçant le long de l'un d'entre eux, on est sûr de faire le moins possible de route.
   Par contre les parallèles ne sont pas des géodésiques. On le voit bien si A et B sont très proches des pôles. Le seul parallèle qui soit une géodésique, c'est l'équateur.

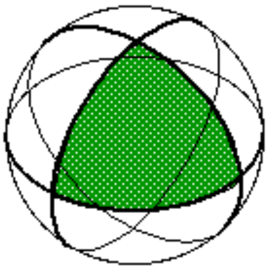






4. Relier E, F, G en minimisant les trajets. Comment sont les angles aux sommets de ce “triangle sphérique” ?

   Maintenant qu’on sait ce qui minimise les trajets, on peut définir ce qu’est un triangle : le bord d’un triangle c’est la réunion des géodésique reliant les trois sommets entre eux.



   Pour ce triangle un peu particulier, les angles aux sommets sont des angles droits.

5. Que vaut la somme des angles ?

   La somme des angles est $3 \times 90^0 = 270^0$ (ou en radian : $3\frac{\pi}{2}$). Comparons à un triangle euclidien, c’est-à-dire tracé sur une feuille plane : la somme des angles est toujours égale à 180^0 (c’est le cinquième postulat d’Euclide). Mais pour ce triangle sphérique, on obtient plus que 180^0 ... Est-ce un hasard, ou bien est-ce toujours le cas ? On va essayer sur un autre exemple plus tard.

6. Calculer la portion de surface que recouvre ce triangle sphérique. En déduire l’aire du triangle.

   J’ai besoin de 8 copies de ce triangle pour recouvrir toute la sphére. Donc la portion de sphére est 1/8. Une sphére de rayon unité a une surface d’aire 4π. L’aire du triangle est par conséquent égale à $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ (sur une sphére de rayon 1).

7. Tracer un triangle sphérique à trois angles plats. (eh oui!!)

   Comment tracer un triangle sphérique A, B, C à trois angles plats? Je pars du sommet A. Admettons que j'atteigne B. Je dois repartir en formant un angle plat, c'est-à-dire en continuant sur la même géodésique! En continuant de cette façon, je vais finir par retomber sur A. Ainsi, trois points distincts mis sur un même grand cercle forment un triangle à trois angles plats. Ici, la somme des angles vaut $3 \times 180^0 = 540^0$. Elle est encore supérieure à 180^0 ...

8. Quelle est l'aire de ce triangle?

   Ce triangle coïncide avec un hémisphére. La portion de sphère qu'il recouvre est donc $\frac{1}{2}$. L'aire du triangle est $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$.

9. Pour ces deux triangles particuliers, calculer : $\frac{\text{Somme des angles}}{180}$ - 4 portion d'aire (ou "Somme des angles - aire" quand on mesure les angles en radians).

   On trouve pour le triangle à trois angles droits :
   $\frac{3*90}{180} - 4 * \frac{1}{8} = 1$ (en radian : Somme des angles - Aire $=3 * \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{8} = \pi$).
   Pour le triangle à trois angles plats :
   $\frac{3*180}{180} - 4 * \frac{1}{2} = 1$ (en radian : Somme des angles - Aire$=$ $3 * \pi - 2\pi = \pi$).

10. Quelle conjecture peut-on faire?

    Pour ces deux triangles, on trouve 1 (ou en radian : π). On peut se demander si la formule :

    $$\frac{\text{Somme des angles}}{180} - 4\text{portion d'aire}=1 \text{ (ou en radian : Somme des angles - Aire} = \pi)$$

    est vrai pour tout triangle. C'est notre conjecture. Une conjecture est une affirmation qui n'a pas encore de démonstration.
    Il existe des conjectures très célèbres encore non résolues, parmi celles-ci citons la conjecture des nombres premiers jumeaux (*il existe une infinité de nombres premiers p et q tels que $p - q = 2$*), la conjecture de Golbach (*tout entier pair > 2 s'écrit comme somme de deux entiers impairs*) ou l'hypothèse de Riemann.
    Notre formule possède une démonstration. Elle a été trouvée par Johann Heinrich Lambert (26 août 1728 à Mulhouse - 25 septembre 1777 à Berlin) , un mathématicien, physicien et astronome alsacien.
    Au passage, voyons ce que l'on peut en déduire sur la somme des angles d'un triangle sphérique :

    $$1 + 4\text{portion d'aire} > 1 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\text{Somme des angles}}{180} > 1$$

    autrement dit, la somme des angles est toujours strictement plus grande que 180^0. Superbe.

11. On appelle "quartier" la portion de surface comprise entre deux méridiens. Calculer l'aire d'un quartier pour un angle nul, un angle droit, un angle plat.

    La portion de surface qu'on étudie, on l'appelle quartier, comme un quartier d'orange. Pour $\alpha = 0$, l'aire est zéro, les deux méridiens sont confondus : Aire du quartier d'angle $0 = \text{Aire}(0) = 0$. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est un quart de l'orange qu'on prend : $\text{Aire}(\frac{\pi}{2}) = \pi$. Pour $\alpha = \pi$, c'est la moitié de la sphère : $\text{Aire}(\pi) = 2\pi$.

12. A quoi s'attendre pour l'aire d'un quartier d'angle α ?

    On constate que, dans ces cas particuliers, Aire$(\alpha) = 2\alpha$. (encore une conjecture).
    Pour $\alpha = \frac{2\pi}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$), il faut q copie de ce quartier pour recouvrir la sphére, donc

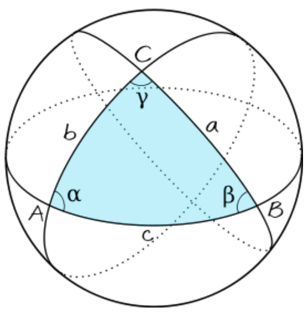
    $$q\text{Aire}(\frac{2\pi}{q}) = \text{Aire de la sphére} = 4\pi$$

    Ce qui donne Aire$(\frac{2\pi}{q}) = \frac{4\pi}{q} = 2\alpha$.
    Il est à peu près clair qu'on a le droit de sommer :

    $$\text{Aire}(\ p\frac{2\pi}{q}) = p\ \text{Aire}(\frac{2\pi}{q}) = p\frac{4\pi}{q} = 2\frac{2p\pi}{q}$$

    pour p et q entiers. (et pourvu que on ne fasse pas plusieurs fois le tour de la sphére, autrement dit $p \leq q$).
    Ainsi, la formule Aire$(\alpha) = 2\alpha$ est vraie pour α rationnel. La fonction $\alpha \longmapsto$ Aire(quartier d'angle α) est continue. Comme on peut approcher tout nombre réel par une suite de nombre rationnel ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour ceux à qui ce vocabulaire parle) la formule est encore vraie pour les angles non rationnels.

13. Un triangle d'angles α, β, γ est à l'intersection de trois quartiers d'angle respectif α, β, γ . Trouver une formule reliant l'aire du triangle et celle des trois quartiers.



    Au sommet d'angle α, on prolonge les deux arêtes du triangle en les deux grands cercles correspondants. On obtient ainsi deux quartiers d'angle α. On procède de même à chaque sommet du triangle ce qui nous fait 6 quartiers. Et là, une copie du triangle apparaît en symétrie par rapport au centre de la sphére. On peut alors voir que tout point de la sphére appartient au moins à un quartier. Donc la sphére est recouverte par ces 6 morceaux. Mais ils se chevauchent : au-dessus des deux triangles, ils forment trois couches, en dehors, une seule couche. Donc l'aire des 6 quartiers est : Aire des 6 quartiers = Aire de la sphére + 4 aire du triangle.

14. Démontrer la conjecture.

    Comme on connaît l'aire des quartiers : $2*2\alpha+2*2\beta+2*2\gamma = 4\pi+4$ aire du triangle autrement dit : $\alpha+\beta+\gamma-$aire du triangle $= \pi$.