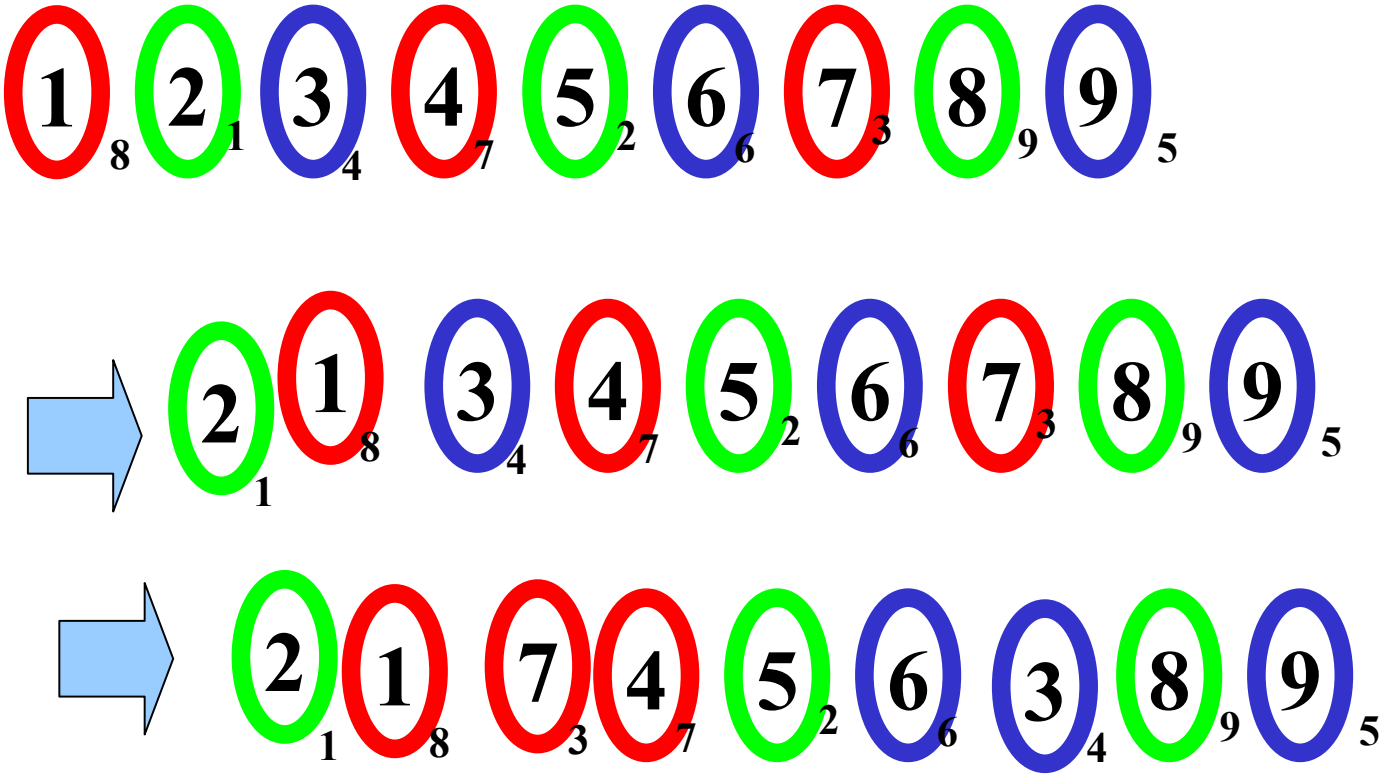
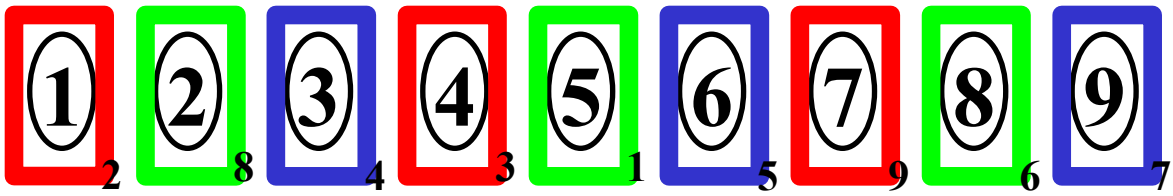


Voici une des solutions. Il y en a 4 autres.

On peut mettre les trois rouges en position 345. On peut d'autre part mettre les bleus en position 456, 567 et 678.



Dans ce cas il n'y a pas de solution...

Les outils mathématiques utilisés dans le jeu des 3 couleurs sont les *permutations*. Comme leur nom l'indique, ce sont des opérations réversibles (changer les positions d'un ensemble fini d'objets) que l'on peut itérer, faire se succéder, etc. L'ensemble de toutes les permutations de n éléments est appelé le groupe symétrique, noté S_n . Il a n!=1.2.3...n éléments.

Dans chaque exercice, on nous donnait quelques permutations de départ (une par objet) que l'on pouvait utiliser autant que l'on voulait pour obtenir des configurations visées : triplets d'une seule couleur, en l'occurrence.

Regardons d'abord le cas des carrés (2ème exercice).
Le 1 peut permuter avec le 2, le 2 avec le 8, le 3 avec le 4, le 4 avec le 3, etc. Notons tout de suite que le 3 et le 4 peuvent s'échanger l'un avec l'autre mais avec aucun des autres (1256789). De même 7 et 9.
Les cinq autres carrés (12568) permutent également entre eux. Ces cinq carrés sont disposés ainsi sur la ligne :

RV - -VB - V -

(où on indique seulement leurs couleurs). Comme cette famille de carrés contient tous les carrés verts, on voit bien qu'il est impossible par une permutation de ces carrés d'obtenir **trois carrés verts consécutifs** VVV, puisqu'il n'y a pas trois carrés consécutifs dans cette famille.
Les deux autres familles peuvent être représentées ainsi :

- - BR - - R - B

et les opérations permises ne feront que permuter entre eux les deux carrés de droite et/ou les deux de gauche entre eux. On voit bien que les deux carrés rouges concernés seront toujours séparés par au moins deux espaces, ce qui rend impossible d'avoir un triplet RRR sur la ligne complète. De même pour les bleus, pour la même raison.
On en déduit que les permutations autorisées (même combinées) ne peuvent produire ni VVV, ni RRR, ni BBB.

Regardons maintenant le cas des cercles (1er exercice).

Le 1 peut permuter avec le 8, le 2 avec le 1, le 3 avec le 4, le 4 avec le 7, etc... Les différentes familles dont les membres vont permuter entre eux et seulement entre eux sont les suivantes :

RV - - V - - VB , - - BR - - R - - et - - - - - B - - -

On voit pour les mêmes raisons que précédemment que le triplet VVV est impossible (cela se produirait à l'intérieur de la première famille, or elle ne contient aucune suite de trois cercles contigus). Pour obtenir BBB. On voit d'abord qu'il faut que ce triplet comporte le cercle de la troisième famille (en numéro 6) puisque celui-ci ne peut pas bouger. Il n'y a donc pas plus de trois possibilités pour la position du triplet : positions 456, 567 ou 678. Les trois sont possibles. Pour la première, amener le 9 bleu de la première famille en position 5 et le 3 bleu de la deuxième famille en 4 (permutations données au départ). Pour la deuxième, amener le 9 bleu de la première famille en position 5 et le le 3 bleu de la deuxième famille en 7(permutations données au départ). Pour la troisième, amener le 9 bleu de la première famille en position 8 et le le 3 bleu de la deuxième famille en 7 (permutations données au départ).
Pour obtenir RRR. Comme la deuxième famille contient deux rouges, et vu les espacements dans cette famille, il faut nécessairement amener ces deux rouges en 3ème et 4éme positions (par exemple en amenant le 7 rouge en 3). Ensuite on peut réaliser aussi bien « R en 234 » et « R en 345 ». Pour la première, amener le 1 rouge de la première famille en position 2 (permutation donnée au départ). Pour la seconde, amener le 1 rouge de la première famille en position 5 (pour cela échanger 9 avec 5, puis 8 avec 9, puis 1 avec 8).

Aller un peu plus loin en utilisant de la théorie des groupes (ou beaucoup de pratique..).

Les opérations données par l'énoncé sont des éléments particuliers du groupe des permutations de l'ensemble {1,2,3,4,5,6,7,8,9 }. Ces éléments sont tous des *transpositions* (échange de deux éléments a et b et d'eux seuls, ce qui est noté (a,b)). Le problème posé consiste à demander si les permutations appartenant au groupe engendré par ces transpositions envoie la suite
123456789 sur une suite où les couleurs portées par ces nombres font apparaître un triplet RRR, BBB ou VVV. Par exemple, la suite 147258369 ferait apparaître RRRVVVBBB, dans le cas des carrés comme dans le cas des cercles. Hélas, elle ne fait pas partie de ce que les transpositions données permettent d'obtenir.
Qu'obtient-on ?

Premier cas (cercles).

Les transpositions données sont (1,8), (8,9), (9,5), (5,2), (2,1) ; (3,4), (4,7), (7,3) (on oublie « (6,6) », qui ne fait rien : c'est l'élément neutre du groupe S_9). Cette façon de les lister met en évidence que les sous-ensembles {1,2,5,8,9 }, {3,4,7 }et {6 }auront leurs éléments permutés séparément par nos transpositions donc par le groupe qu'elles engendrent. Ce sont les « familles » dont il est question plus haut. De plus le groupe engendré par nos transpositions comporte exactement **toutes** les permutations respectant ces trois sous-ensembles. En effet, à l'ordre près des éléments, c'est une conséquence du petit théorème suivant :

engendrent S_n tout entier.
Une démonstration par récurrence sur n est (relativement) aisée. Entraînez-vous avec n=3...

On remarquera que les transpositions qui nous étaient données comportaient aussi la transposition (n,1) en plus de celles listées ci-dessus, ce qui est superflu puisque (n,1)=(n-1,n)(n-2,n-1)...(2,3)(1,2)(2,3)(3,4)...(n-1,n), peut s'écrire en fonction des autres.

On déduit de ce théorème que les transpositions données permettaient de déplacer comme on le voulait les cercles de
RV - - V - - VB , - - BR - - R - - et - - - - - B - - -
dans les places qu'ils occupent. On en déduit par exemple qu'il y avait 48 configurations possibles faisant figurer des cercles rouges en 2ème, 3ème et 4ème positions (en utilisant les transpositions autorisées). En effet, les permutations qui réalisent cette configuration sont exactement celles qui permutent l'ensemble 1,2,5,8,9 en envoyant 1 sur 2 (il y en 4!=24 telles permutations de
cet ensemble) et qui permutent l'ensemble 3,4,7 en envoyant 3 sur 7 (il y en a 2). Il y
en a donc bien 4! fois 2 = 48.

On pourrait dénombrer de même toutes les configurations réalisant les triplets demandés.

Second cas (carrés). Les transpositions engendrent alors le groupe de toutes les permutations respectant les sous-ensembles {1,2,5,6,8 } ,{3,4 } et {7,9 }(utiliser à nouveau le théorème ci-dessus). Cela fait 5!*2*2 = 480 permutations possibles, dont aucune ne peut réaliser un triplet RRR, BBB ou VVV d'après ce que nous avons vu plus haut.