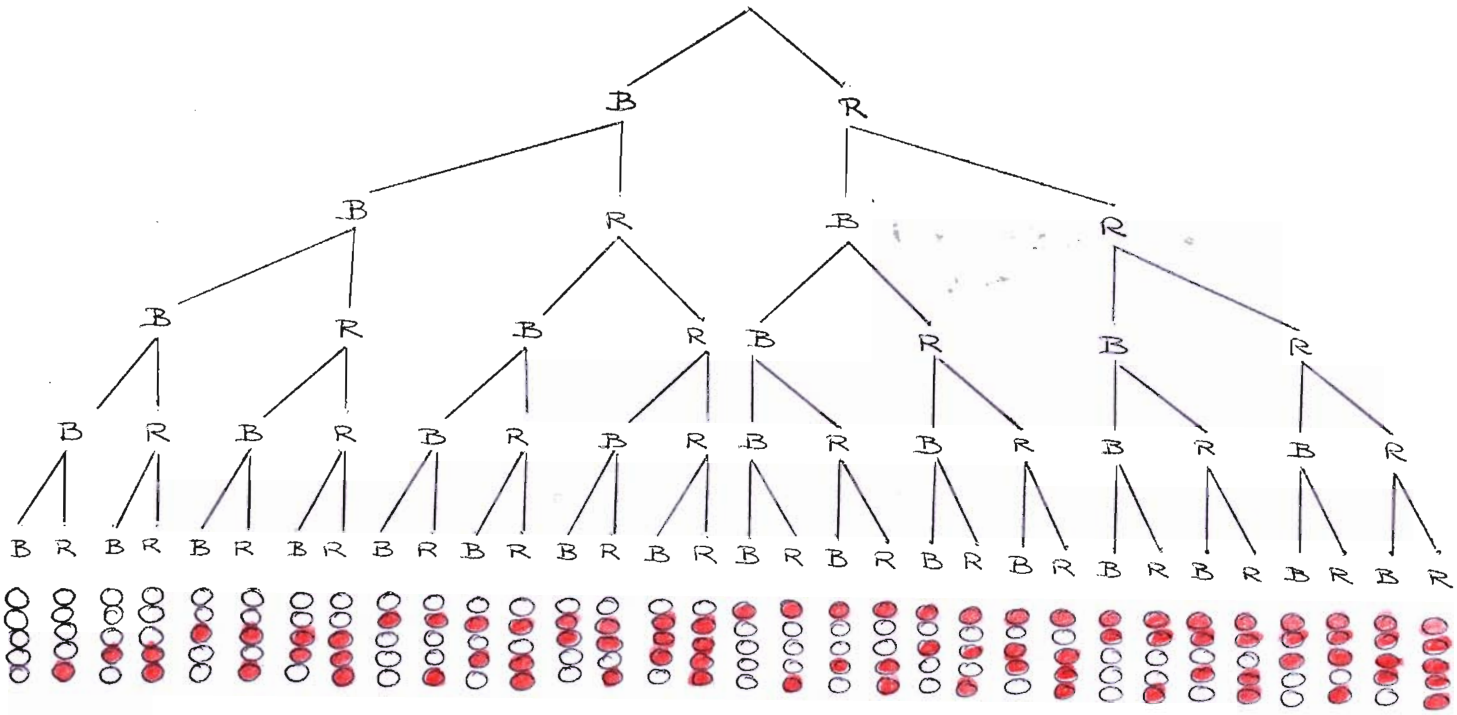
Stand arènes

On appelle "empreinte" une suite de 5 billes reliées entre elles. Ces billes peuvent être soit rouges soit blanches

* Combien d'empreintes différentes peut-on ainsi obtenir ?



On obtient donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ empreintes différentes.

* On dispose de 10 sacs. Chaque sac contient toutes les empreintes possibles. On tire dans chaque sac une empreinte, calculez la probabilité que chaque empreinte soit différente des autres. Et donc celle d'en avoir deux identiques.

Cherchons le nombre de façons d'obtenir des empreintes toutes différentes.

- on a 32 choix possibles pour la première empreinte ;
- pour chaque choix de la première empreinte, on en a 31 pour la deuxième qui doit être différente de la première ;
- pour chacun des 32×31 choix des deux premières empreintes, on a 30 choix pour la troisième qui doit être différente des deux premières ;

– ...

– pour chacun des $32 \times 31 \times \dots \times 24$ choix des neuf premières empreintes, il y a 23 choix pour la dernière.

Il y a donc $32 \times 31 \times 30 \times \dots \times 25 \times 24 \times 23$ façons de choisir 10 empreintes toutes différentes.

De la même façon, il y a $\underbrace{32 \times 32 \times \dots \times 32}_{10 \text{ facteurs}} = 32^{10}$ façons de choisir 10 empreintes.

La probabilité p de choisir des empreintes toutes différentes est donc de $32 \times 31 \times \dots \times 24 \times 23$ chances sur 32^{10}

soit $p = \dfrac{32 \times 31 \times \dots \times 24 \times 23}{32^{10}} = \dfrac{31 \times 30 \times \dots \times 24 \times 23}{32^9}$

d'où $p \simeq 0{,}207924$.

Le contraire de "toutes les empreintes sont différentes" est "il existe au moins deux empreintes identiques".
La probabilité que deux empreintes au moins soient identiques est donc $1 - p \simeq 0{,}792076$

* On a n sacs contenant toutes les empreintes possibles. On tire dans chaque sac une empreinte. Quel est le nombre minimal de sacs nécessaire pour avoir une probabilité ½ d'en avoir tiré deux identiques ?

Un raisonnement analogue montre que la probabilité de tirer des empreintes toutes différentes vaut

$p_n = \dfrac{32 \times 31 \times \dots \times (32 - n + 1)}{32^n}$

et que celle d'en avoir tiré au moins deux identiques est $1 - p_n$.

On cherche n tel que $1 - p_n \geq \frac{1}{2}$, soit $p_n \leq \frac{1}{2}$.
On calcule successivement $\frac{31}{32}$, puis $\frac{31 \times 30}{32^2}$, ... On trouve $\dfrac{31 \times 30 \times \dots \times 26}{32^6} < \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{31 \times 30 \times \dots \times 27}{32^5} > \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $n = 7$ est la plus petite valeur cherchée.